Источниками вектора напряженности поля в диэлектрике являются свободные и поляризационные заряды:

Источниками вектора электрической индукции (вектора электрического смещения) являются только свободные заряды:

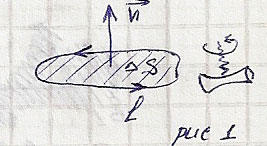
где  *–* вектор поляризации.

Если не оговорено особо, то считаем, что связь между векторами напряженности и индукции в диэлектрике линейна и однородна:

**3.1.1**. Вывести граничные условия для векторов и в случае неподвижных проводников и диэлектриков в электростатическом поле.

**Решение**. Электростатическое поле, в вакууме или веществе, является потенциальным полем. Математически этот факт выглядит так

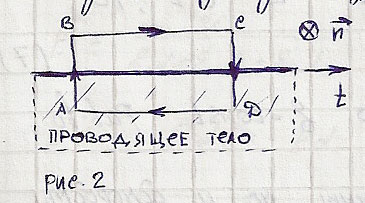
Т.е. циркуляция вектора по любому замкнутому контуру равна нулю. В дифференциальной форме это выглядит так



Это инвариантное определение , которое не зависит от выбора координатных осей. Оно определяет проекцию ротора на направление – нормаль к элементарной площадке .

1. Сначала рассмотрим поверхность проводника.

На поверхности проводника выделим контур с определенным направлением обхода. В данном случае направление «от нас». Оно легко определяется правилом буравчика. Итак,



Стороны и делаем очень маленькими, так что вкладом от них в циркуляцию можно пренебречь. Внутри проводника поле равно нулю. Остается

На участке : . Интеграл равен нулю, если равно нулю подынтегральное выражение:

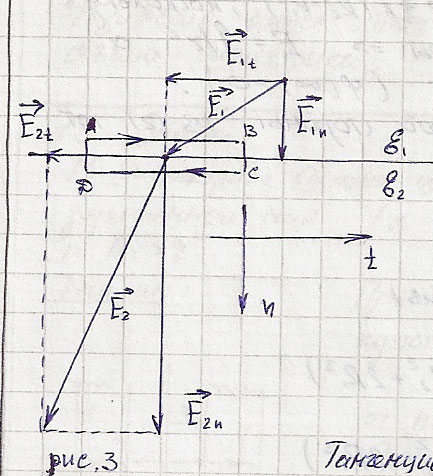
Получаем важный результат:

Это означает, что поле на поверхности проводника направлено по нормали к поверхности. Оно не имеет касательных составляющих. Отсюда, в частности, сразу вытекают некоторые полезные соотношения. Поскольку , потенциал на поверхности проводника постоянен. Поверхность проводника – эквипотенциальная поверхность.

Полный заряд проводника:

2. Рассмотрим границу раздела двух диэлектриков.

Предполагаем, что вблизи границы раздела диэлектрики однородны. Или, другими словами, каждые участки тела эквивалентны по физическим свойствам (температура, состав и т.п.).

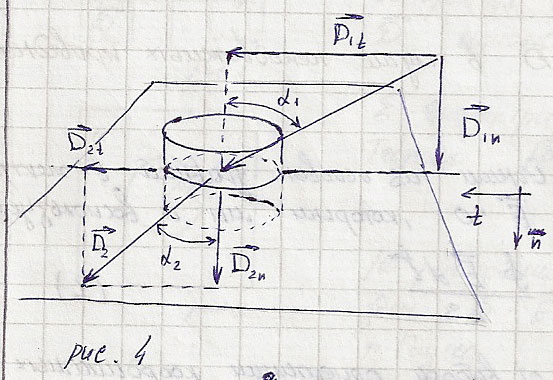


Строим бесконечно малый контур (прямоугольник), охватывающий линию раздела. Рассуждения такие же, как в случае проводника.

Следовательно,  или, в векторной записи

Для вектора индукции граничные условия получим из теоремы Гаусса:

Мы учли отсутствие свободных зарядов на границе раздела. Согласно рисунку



Итак

При наличии свободных зарядов на границе раздела, очевидно

Следствие 1. Если имеет место соотношение

то

Это случай изотропных диэлектриков. Равенство имеет место и в случае .

Следствие 2. Если диэлектрики изотропные и однородные, то . Тогда, при отсутствии свободных зарядов

Это значит, что верно уравнение Лапласа. Перепишем полученные соотношения. Непрерывность тангенциальных производных эквивалентна непрерывности потенциала (это также очевидно из смысла потенциала как работы по переносу заряда в бесконечность).

Равенство записывается в виде:

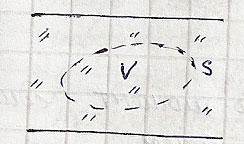
3. Граница раздела диэлектрика и проводника.

По аналогии легко получить

**3.1.2**. Электрическое поле в диэлектрической среде описывается вектором электрической индукции , который связан с вектором напряженности соотношением

где вектор называется вектором поляризации. Исходя из этого соотношения, установить связь вектора поляризации с поляризационными зарядами. Выяснить физический смысл этого вектора.

**Решение**.



1. Как известно, напряженность электрического поля определяется действием всех зарядов – свободных и поляризационных. Если выделить внутри диэлектрика объем и применить к нему теорему Гаусса, то получим

где – поверхность, окружающая объем. Вектор индукции определяется действием только свободных зарядов, поэтому для того же объема

Тогда

По формуле из условия задачи сразу получим

Перейдем к объемному интегралу по формуле Гаусса-Остроградского:

и заметим, что

Тогда

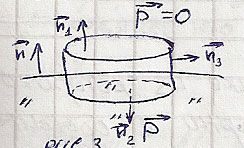
Замечание 1. Если диэлектрик однородный, то и его поляризация однородна. Это значит, что внутри такого диэлектрика и

При этом, конечно, на поверхности диэлектрика поверхностная плотность заряда .

Замечание 2. Поместим диэлектрик в пустоте. В отсутствии внешнего поля , где – объем диэлектрика. Очевидно, это верно и для любого другого объема, содержащего в себе данный объем . Тогда

Или

2. Рассмотрим на поверхности диэлектрика элемент объема, примыкающий с двух сторон бесконечно близкими площадками. Для однородного диэлектрика



Мы учли, что вне диэлектрика (см. замечание 1). Поскольку :

3. Дипольный момент, по определению, для точечных зарядов:

Для объемных зарядов он переписывается в виде (рассматриваем только поляризационные заряды):

Тогда можем написать

Интегрирование ведется по объему , охватывающему диэлектрик. Это не меняет смысл, но упростит дальнейшие вычисления.



Интеграл в правой части преобразуем, помножив его формально на постоянный вектор .

Вспомним, что

или

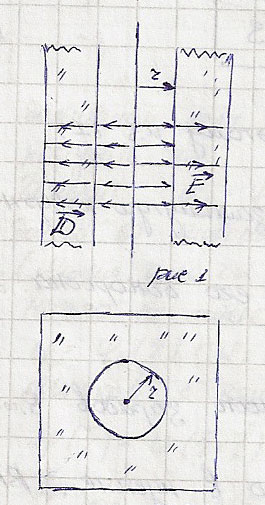
Тогда

Поскольку произвольная постоянная, получим

так как вне диэлектрика . Для второго интеграла по той же причине остается только часть внутри объема диэлектрика.

Итак, – это дипольный момент единицы объема диэлектрика. В этом его физический смысл.

**3.1.3**. В диэлектрике сделана цилиндрическая полость радиуса . По ее оси проходит заряженная нить . Найти напряженность поля на расстоянии и .



**Решение**. Для нити в пустоте:

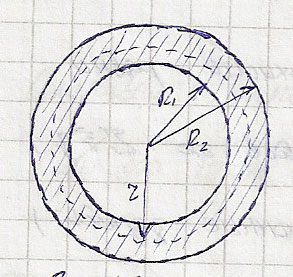
Полагаем, в диэлектрике, если не указано особо:

Теорема Гаусса имеет вид

где – свободные заряды. Элементарно получаем

**3.1.4**. Получить выражение для распределения потенциала в диэлектрике, из которого изготовлен толстостенный полый шар. Шар заряжен равномерно с объемной плотностью . Диэлектрическая проницаемость .

**Решение**. Мысленно выделим в диэлектрике сферическую поверхность радиуса .



Для этой поверхности:

где – свободный заряд, размещенный внутри поверхности.

Потенциал

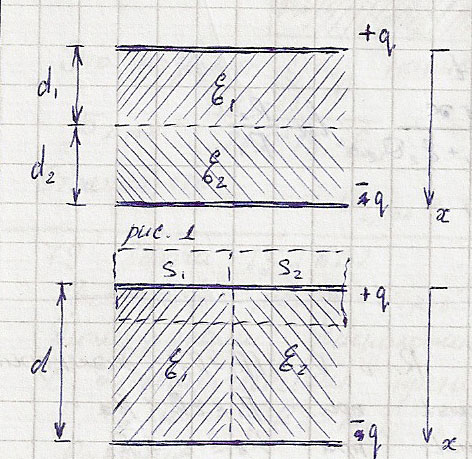
Константу определим из следующих соображений. Вне сферы, очевидно

Сошьем эти решения на границе.

Окончательно:

**3.1.5**. Найти емкость плоского конденсатора в случаях, указанных на рисунке. Краевыми эффектами пренебречь.

**Решение**.



1) В первом случае, внутри конденсатора . Это следует из того, что каждая заряженная пластина создает поле и поле внутри находится суперпозицией. Напряженность поля в каждом диэлектрике

Потенциалы найдутся так:

На границе раздела

Тогда

Разность потенциалов:

Емкость, по определению

2) Во втором случае проще всего воспользоваться теоремой Гаусса. Если краевых эффектов нет, то

Заметим, что напряженность поля в двух диэлектриках одинакова. Это следует из того, что равна разность потенциалов и . Поскольку интеграл принимает вид

Можно было бы решить вторую часть задачи по-другому, без использования теоремы Гаусса.

Итак, поэтому

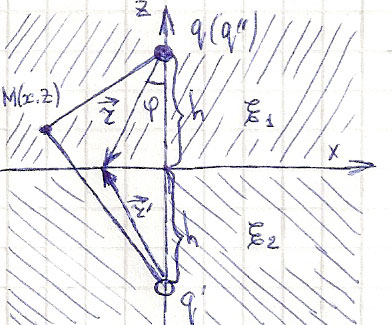
или

Кроме того,

Из этих двух уравнений легко получить

**3.1.6**. Точечный заряд находится на расстоянии от плоской границы раздела двух диэлектриков с проницаемостями и . Найти потенциал электростатического поля методом изображений.

**Решение**. В случае проводников задача просто решается методом электростатических изображений. Для диэлектриков все сложнее. Однако данную задачу можно решить, если сделать некоторые предположения, оправдывающиеся при последующем вычислении.



В окрестности точечного заряда кулоново поле должно стремиться к бесконечности, поэтому поле должно содержать слагаемое . Дополнительный вклад в поле должны давать поляризационные заряды на границе раздела. Предположим, что этот вклад можно описать, разместив зеркально заряд . Тогда поле в диэлектрике ищем в виде суммы

Второе предположение заключается в том, что поле в диэлектрике представляется в виде

где заряд расположен в месте заряда .

Дальше можно решать задачу двумя путями.

Способ 1. На границе раздела должны выполняться два условия: равенство касательных составляющих для напряженности поля и нормальных составляющих для индукции.

Из этих двух условий получим

В итоге

Потенциал . Его ищем отдельно для каждого заряда, а затем просто складываем результат, в силу принципа суперпозиции для полей. Иными словами

Поэтому получаем

Константы равны нулю, в силу того что потенциал на бесконечности принят равным нулю.

Способ 2. Предположения для полей останутся такими же и для потенциалов. Т.е. ищем потенциалы в виде

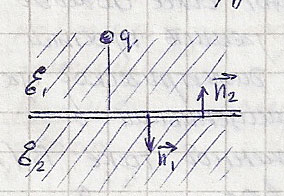
Граничные условия на границе диэлектриков выглядят так

Их мы получали ранее в другой задаче. Первое условие дает

Второе условие

Из полученных соотношений легко получим

**3.1.7**. Найти плотность связанных поверхностных зарядов, наведенных на плоской границе раздела двух однородных диэлектриков и точечным зарядом (см. предыдущую задачу). Какой результат получится при , каков его физический смысл?



**Решение**. Для каждого из диэлектриков верно уравнение:

На границе раздела диэлектриков, в отсутствии свободных зарядов, должно выполняться равенство

или

Последнее равенство можно было сразу получить из теоремы Гаусса, применительно к контуру с бесконечно малыми боковыми сторонами.

Еще одно граничное условие

переписанное в виде

позволит немного упростить вычисления. Итак:

Потенциалы найдены в предыдущей задаче

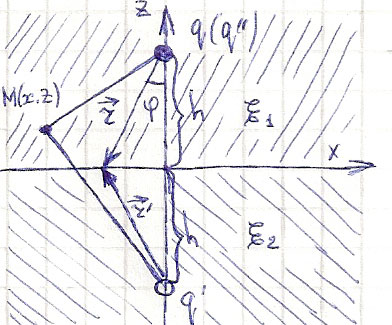
На поверхности раздела:

Теперь легко получить, что

Фактически это соответствует случаю раздела диэлектрика и проводника. Однако теперь на границе раздела появляются индуцированные заряды со стороны проводника. Они учтены в этом выражении.

**3.1.8**. Бесконечная заряженная нить расположена на расстоянии от границы раздела двух однородных бесконечных диэлектриков. Найти поле, создаваемое ею.

**Решение**. Потенциал бесконечной заряженной нити:



Решим задачу методом изображений подобно тому, как мы это проделали для точечных зарядов. Проделав те же рассуждения, ищем потенциалы в виде

Граничные условия:

Первое условие соответствует значениям . Оно дает

Заметим, далее, что для точки :

Аналогично

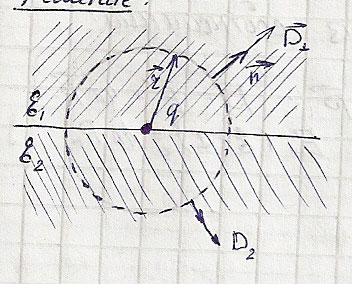
Приравнивая, получим

Видим, что результаты получены в точности как для точечных зарядов.

Из полученных соотношений легко получим

Окончательно

**3.1.9.** Точечный заряд расположен на плоской границе раздела двух однородных бесконечных диэлектриков с проницаемостями и . Найти потенциал , напряженность и индукцию электрического поля.



**Решение**. Окружим заряд сферической поверхностью. Теорема Гаусса в интегральной форме

Для однородного диэлектрика

Теперь нужно заметить следующее. На границе раздела . Это же означает, что , поскольку , на бесконечности потенциалы обращаются в нуль и само поле .

Отсюда получаем

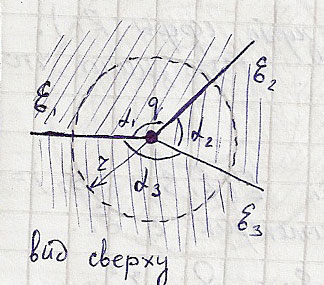
С учетом направления:

Следовательно

Потенциал найдем из соотношения .

**3.1.10**. От некоторой прямой, на которой находится точечный заряд , расходятся веерообразно три полуплоскости. Они образуют три двугранных угла . Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью соответственно . Определить потенциал , напряженность и индукцию электрического поля.

**Решение**. Рассуждения аналогичны тем, что были в предыдущей задаче.

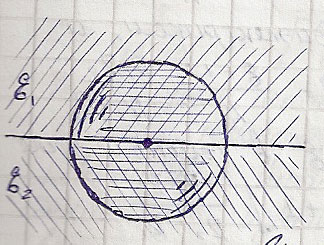


Площади соответствующих поверхностей

Поэтому

**3.1.11**. Центр проводящего шара радиуса , заряд которого , находится на плоской границе раздела двух бесконечных однородных диэлектриков с проницаемостями и . Найти потенциал электрического поля, а также распределение заряда на шаре.

**Решение**. Поле вне шара будет таким же, как поле точечного заряда , размещенного в его центре. Эту задачу мы решили раньше:



1. Поле только свободных зарядов описывается вектором индукции :

Переходя к элементарной площадке, получим

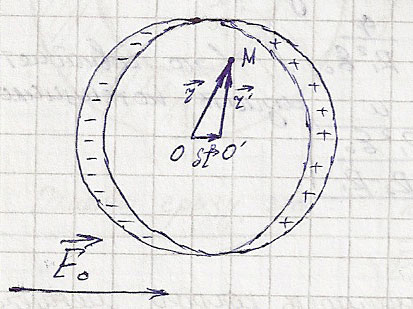
Для разных полусфер поверхностная плотность будет разной.

2. Поле свободных и поляризационных зарядов описывается вектором напряженности :

- связанные заряды, появившиеся во время поляризации.

Отметим, что

**3.1.12**. Диэлектрический шар помещен в однородное внешнее поле . Найти поле внутри и вне диэлектрика с учетом его поляризации. Диэлектрическая поляризация



**Решение**. Рассмотрим упрощенное решение задачи, предложенное в учебнике Сивухина. Предполагаем, что до поляризации диэлектрик представлял собой однородную смесь из положительных и отрицательных зарядов. В результате поляризации все положительные заряды сдвинулись относительно отрицательных зарядов на расстояние . Тогда вектор поляризации

где – объемная плотность электричества (у нас - поляризационных зарядов). Это так, поскольку по физическому смыслу вектор поляризации - дипольный момент единицы объема диэлектрика.

а) Поле внутри шара. Рассматриваем шары отдельно друг от друга как объемные заряды с плотностями и . Поле от каждого из них в точке :

(поле шара, равномерно, заряженного по объему – см. соотв. задачу)

Суммарное поле:

Полное поле

Подчеркнем, что этот результат требует, чтобы шар был поляризован равномерно.

б) Поле вне шара. Поле вне шара будем рассматривать как поле точечного диполя, поскольку значение очень мало.

Дипольный момент:

Поле диполя нам известно. Так что

На границе шара . Тогда можем написать

Полное поле

Докажем, что диэлектрический шар, помещенный во внешнее однородное поле , действительно равномерно поляризован. Для этого достаточно убедится в соблюдении граничных условий на поверхности шара и в том, что поле на бесконечности стремиться к . Последнее условие очевидно, поскольку когда . Граничных условий два: должны быть равны касательные компоненты напряженности поля и нормальные составляющие индукции поля (см. соотв. задачу).

Вне шара на его поверхности:

Внутри шара:

Сравнивая значения, видим, что граничные условия соблюдены. Тем самым, утверждение доказано.

Исключим вектор поляризации из полученных формул, предполагая, что . Из того, что

Следует, что

Внутри шара.

Или

Видим, в частности, что поле внутри шара однородно.

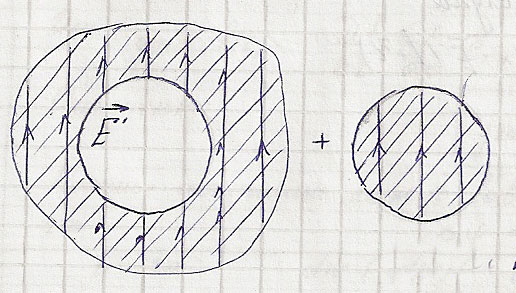
Вне шара.

Это дипольный момент шара во внешнем поле. Подставим его в формулу

Окончательно, вне шара

**3.1.13**. Найти напряженность поля в сферической полости внутри равномерно поляризованного диэлектрика, предполагая, что вне полости поляризация всюду однородна. Поле в диэлектрике равно .

**Решение**. Если внутри диэлектрика поле однородно, то и внешнее поле однородно (см. предыдущую задачу).



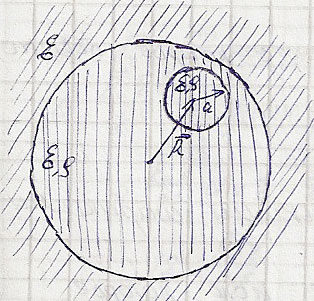
Заполним полость таким же диэлектриком. Тогда к полю в полости добавится поле поляризованного диэлектрического шара . Полное поле

Исключим . Поскольку и :

получим

**3.1.14**. В неограниченной диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью помещен шар из того же материала с объемным зарядом . В шаре сделана сферическая полость, куда помещен маленький шар из того же материала и той же плотностью заряда. Определить силу, действующую на шарик. Все расстояния известны, толщиной зазора в полости пренебречь.

**Решение**. Поле в полости нам [известно](4_теор_Гаусса.docx#поле_в_полости).



Наличие однородного диэлектрика ослабляет его в раз:

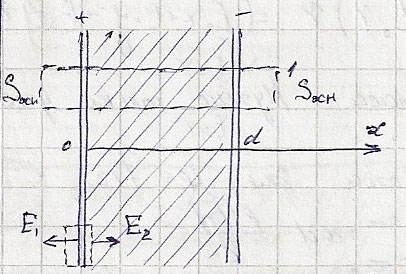
Если – заряд маленького шарика, то сила, действующая на него

Окончательно

**3.1.15**. В плоский конденсатор, на пластинах которого распределен заряд с поверхностной плотностью , вставляется диэлектрик c распределенным в нем зарядом:

Найти напряженность поля внутри конденсатора.

**Решение**. Найдем поле вне пластин. Выделим контур 1 и применим к нему интегральную теорему Гаусса.



Свободный заряд найдется суммированием зарядов на пластинах и заряда внутри пластин. Внутри пластин и внутри контура

Таким образом

Итак, поле вне конденсатора нам известно.

Чтобы найти поле внутри диэлектрика воспользуемся теоремой Гаусса в дифференциальной форме.

где – свободный заряд. Внутри конденсатора

откуда получаем, что

Константу можно найти, зная значение поля на одной из пластин. Проще это сделать для левой пластины, поскольку . Рассмотрим аналогичный контур у левой положительной пластины и вновь воспользуемся теоремой Гаусса

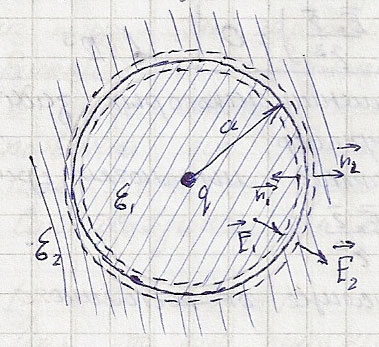
Но , поэтому

Поэтому

Запишем также, что

**3.1.16**. Точечный заряд находится в центре диэлектрического шара радиуса и с проницаемостью . Шар окружен диэлектрической средой . Найти поверхностную плотность связанных зарядов.

**Решение**. Рассмотрим контур из двух концентрических ферм и применим к нему интегральную теорему Гаусса.



Поскольку внутри рассматриваемого объема, получим

Итак

Способ 2. Задачу можно решить, воспользовавшись вектором поляризации. Итак,

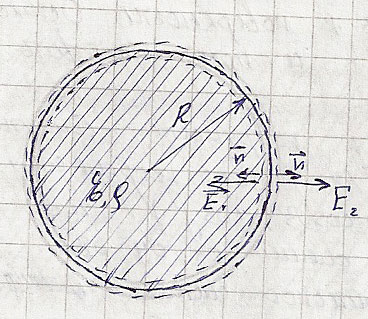
Вне шара

Внутри шара

В итоге

**3.1.17.** Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью по шару радиуса из однородного диэлектрика с проницаемостью . Найти а также объемную и поверхностную плотности связанных зарядов.

**Решение**.



При

При

Сшиваем решение на границе .

Для того чтобы найти объемную плотность связанных зарядов, выделим внутри шара сферу и запишем для нее

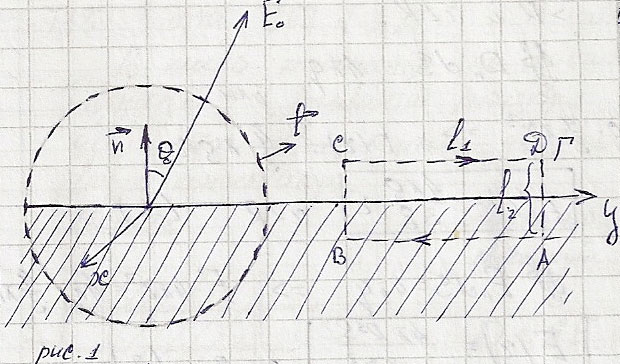
Для поиска поверхностной плотности выделяем две концентрические сферы, облегающие поверхность шара. Для них

**3.1.18**. У плоской поверхности однородного диэлектрика с проницаемостью напряженность поля в вакууме равна , причем вектор составляет угол с нормалью к поверхности диэлектрика. Считая поле внутри и вне диэлектрика однородным найти:

а) поток вектора через сферу радиуса с центром на поверхности диэлектрика;

б) циркуляцию вектора по контуру длины , плоскость которого перпендикулярна к поверхности диэлектрика и параллельна вектору .

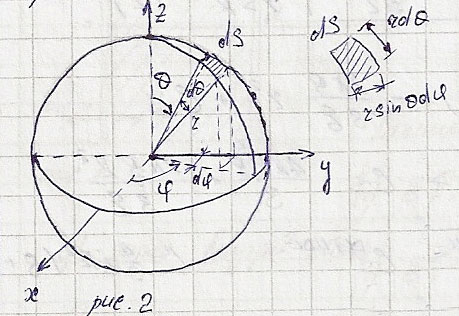
**Решение**. Произведем вычисления двумя способами.



Способ 1. Элемент поверхности в сферических координатах:

На поверхности указанной сферы

Пусть – нормаль к поверхности сферы, тогда



Для верхней полусферы

Для нижней полусферы следует учесть вид поля в диэлектрике. Граничные условия

приводят к такому виду вектора напряженности:

Способ 2:

Внутри диэлектрика

Свободных зарядов на поверхности нет, а

Поскольку для вырезаемого сферой круга

мы можем сразу написать:

Вычислим циркуляцию вектора . Учитывая нулевой вклад в боковые стороны, получим